Logique : TD n°1

Luc Chabassier
chabassier@lsv.fr
Amélie Ledein
ledein@lsv.fr

19/20 janvier 2022

On fixe un ensemble infini $\mathcal{X}$ de symboles de variables.

1 Termes, propositions

Exercise 1 : Définitions inductives

1. Définissez *inductivement* les listes d'éléments de A comme un sous-ensemble de Σ_f^* pour $\Sigma_f = A \cup \{ :: , \text{nil} \}$
2. Définissez *inductivement* l'ensemble des parenthésages bien formés (appelé langage de Dyck) comme un sous-ensemble de Σ_d^* où $\Sigma_d = \{ \, (\, , \,) \, \}$.

Exercise 2 : Parlons propositions

Soit $\mathcal{L}$ un langage à sortes $\mathcal{S} \cup \{ \text{Prop} \}$ contenant des symboles $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, et $\neg$ (où $\exists$ représente la quantification existentielle, “il existe”, $\wedge$ la conjonction “et”, et $\neg$ la négation). Donnez les arités de ces symboles.

Dans la suite, tous les langages étudiés contiennent implicitement les symboles $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, et $\neg$ avec les arités obtenues dans l'Exercice 2.

Exercise 3 : Parlons prédicats

Soit $\mathcal{L}$ le langage à sortes $\{ \text{Terme} , \text{Prop} \}$ formé des symboles

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, 0, $=$, $\hat{}$, $\in$, et $\#$ (où $\hat{}$ dénote la puissance et $\#$ le cardinal),
- $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, et $\neg$.

1. Quelles sont les arités de ces symboles ?
2. Écrire la proposition

   "Tout entier naturel est un nombre complexe"

3. Écrire la proposition

   "Quelque soit n, tout nombre complexe non nul a n racines n-ièmes"

2 Démonstrations

Exercise 4 : Hilbert

Soit le langage à sortes { Terme , Prop } formé des symboles de fonction $\langle \text{Terme} \rangle$ d'arité nulle et S d'arité $\langle \text{Terme}, \text{Terme} \rangle$ (le successeur), et du symbole de prédicat $\leq$ d'arité $\langle \text{Terme}, \text{Terme}, \text{Prop} \rangle$.

$$\frac{\forall x.\ A}{(t/x)A} \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

$$\frac{}{\forall x.\ (x \leq S(x))} \qquad \frac{}{\forall x \forall y \forall z.\ (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z}$$

Figure 1: Règles pour l'Exercise 4

Les règles définissant l'ensemble des propositions démontrables sont représentées sur la Figure 1. La notation $(t/x)A$ représente la *substitution* de la variable x par le terme t dans la formule A. Par exemple, si R est un symbole binaire, $(t/x)R(x,y) = R(t,y)$. Vous verrez la définition précise au prochain cours, pour l'instant votre intuition devrait suffir.

Montrer que les propositions:

1. $0 \leq S(0)$
2. $0 \leq S(S(0))$

sont démontrables.