

Logique : TD n°1

Luc Chabassier
chabassier@lsv.fr

Amélie Ledein
ledein@lsv.fr

20 janvier 2022

Les questions marquées avec des * sont moins guidées et demandent plus d'initiatives.

On fixe un ensemble infini \mathcal{X} de symboles de variables.

Exercice 1 : Définitions inductives

On se donne un alphabet Σ . Soit $\Sigma_T = \Sigma \cup \{\langle, |, \rangle\}$. Donnez une définition inductive des langages de Σ_T^* suivants :

- Les arbres binaires à feuilles dans Σ .
- Les forêts d'arbres binaires.
- Les forêts non vides d'arbres binaires.
- * Les arbres d'arité non fixée à feuilles dans Σ .

Exercice 2 : Constructions ensemblistes

On se place dans le langage de la théorie des ensembles. Il y a donc deux sortes $\{\text{Set}, \text{Prop}\}$, et les symboles suivants :

- $\emptyset, \times, \cup, \cap, \mathcal{P}$
- $=, \in, \forall, \exists, \wedge, \neg, \Rightarrow$
- Le schéma de compréhension $\{x \in A \mid P(x)\}$ pour tous A et P

1. Donnez les sortes des différents symboles.
2. Définissez un symbole $\exists!$ (*il existe un unique*).
3. Définissez l'ensemble des fonctions B^A pour A et B des ensembles.
4. Définissez l'ensemble des fonctions injectives $A \hookrightarrow B$.
5. Définissez l'ensemble des fonctions surjectives $A \twoheadrightarrow B$.
6. * Définissez des notions d'injectivité et de surjectivité pour des relations. Avec ce nouveau vocabulaire, qu'est-ce qu'une fonction ?
7. * Énoncez une proposition qui dit qu'il existe un ensemble infini. On note cet ensemble ω .
8. * Définissez l'ensemble \mathbf{N} des entiers naturels.