Logique : TD n°2

Luc Chabassier
chabassier@lsv.fr
Amélie Ledein
ledein@lsv.fr

January 25, 2022

Exercise 1 : Substitutions

Let $\mathcal{F} = \{\ f(1)\ \}$ and $\mathcal{P} = \{\ P(2)\ \}$. For every application of a substitution that follows, apply the substitution. Detail all necessary alpha-renamings.

1. $(\exists z\ P(z, x))\{x \to y\}$
2. $(\exists y\ P(y, x))\{x \to z\}$
3. $(\exists y\ P(y, x))\{x \to f(y)\}$
4. $(P(x, f(y)) \land \exists x\ P(f(x), x))\{x \to z\}$
5. $(\forall x\ \forall y\ P(x, f(y)))\{x \to y\}$

Exercise 2 : Preuves en vrac

Donner des démonstrations en déduction naturelle des séquents suivants :

1. $\vdash (\phi \land \psi) \Rightarrow (\phi \lor \psi)$
2. $\vdash (\phi \land \psi \Rightarrow \phi') \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \psi \Rightarrow \phi')$
3. $\vdash (\phi' \Rightarrow \phi) \lor (\phi' \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi' \Rightarrow \phi \lor \psi)$
4. $\vdash \forall x\ \phi \Rightarrow \exists x\ \phi$
5. $\vdash (\forall x\ \phi \lor \forall x\ \psi) \Rightarrow \forall x\ (\phi \lor \psi)$
6. $\vdash \exists x\ (\phi \land \psi) \Rightarrow (\exists x\ \phi \land \exists x\ \psi)$
7. $\vdash \exists y \forall x\ \phi \Rightarrow \forall x \exists y\ \phi$

Exercise 3 : De Morgan law

Let ϕ be a formula. Show that the sequent $\vdash (\neg\exists x \neg\phi) \Rightarrow \forall x \phi$ is provable.

Exercise 4 : Russell's paradox

We define naive set theory over signature $\mathcal{F} = \emptyset$ and set of predicates $\mathcal{P} = \{ \in (2) \}$. The theory contains, for each formula A which free variables are among $x_1, \ldots, x_n, y$, an axiom of the form:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists a \forall y \ (y \in a \Leftrightarrow A)$$

Prove $\forall y (y \in a \Leftrightarrow \neg y \in y) \vdash \bot$.

1 Démonstration

Exercise 5 : Triangles en déduction naturelle

On considère un langage formé de

- trois sortes de termes : `point`, `droite` et `scalaire`,
- deux symboles de fonction : la distance d d'arité $\langle \texttt{point}, \texttt{point}, \texttt{scalaire} \rangle$, la médiatrice m d'arité $\langle \texttt{point}, \texttt{point}, \texttt{droite} \rangle$,
- deux symboles de prédicats : l'égalité $=$ d'arité $\langle \texttt{scalaire}, \texttt{scalaire} \rangle$, l'appartenance $\in$ d'arité $\langle \texttt{point}, \texttt{droite} \rangle$.

Soit Γ le contexte formé des deux propositions

$$\left\{ \begin{array}{llcl} \forall x \forall y \forall z & [x \in m(y,z) & \Leftrightarrow & d(x,y) = d(y,z)] \\ \forall x \forall y \forall z & [(x = y \wedge y = z) & \Rightarrow & x = y] \end{array} \right.$$

et

$$\phi \quad = \quad \forall w \forall x \forall y \forall z \ \ [(w \in m(x,y) \wedge w \in m(y,z))) \Rightarrow w \in m(x,z)]$$

Donnez une démonstration du séquent $\Gamma \vdash \phi$.

Exercise 6 : Erreurs fréquentes

Les arbres de la figure 1 ne sont pas des démonstrations, des erreurs s'y sont glissées. Lesquelles ? Dans quels cas les arbres π_2 et π_3 sont-ils des démonstrations ?

Exercise 7 : Règles admissibles

Prouver que les deux règles de la figure 2 sont *admissibles*, c'est-à-dire que si un séquent $\Gamma \vdash \phi$ est démontré en utilisant ces règles en plus des règles de déduction naturelle, il existe une preuve en déduction naturelle de $\Gamma \vdash \phi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi\lor\psi\vdash\phi\lor\psi}\,\text{ax}}{\phi\lor\psi\vdash\phi}\,\lor_{\mathrm{I}}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\phi\lor\psi\vdash\phi\lor\psi}\,\text{ax}}{\phi\lor\psi\vdash\psi}\,\lor_{\mathrm{I}}^{2}}{\phi\lor\psi\vdash\phi\land\psi}\,\land_{\mathrm{I}}}{\vdash(\phi\lor\psi)\Rightarrow(\phi\land\psi)}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}$$

(a) π_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\ \phi\vdash\exists x\ \phi}\,\text{ax}\qquad\dfrac{}{\exists x\ \phi,\phi\vdash\phi}\,\text{ax}}{\exists x\ \phi\vdash\phi}\,\exists_{\mathrm{E}}}{\exists x\ \phi\vdash\forall x\ \phi}\,\forall_{\mathrm{I}}}{\vdash\exists x\ \phi\Rightarrow\forall x\ \phi}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}$$

(b) π_2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F\vdash\forall x\exists y\ \phi}\,\text{ax}}{F\vdash\exists y\ \phi}\,\forall_{\mathrm{E}}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F,\phi\vdash\phi}\,\text{ax}}{F,\phi\vdash\forall x\ \phi}\,\forall_{\mathrm{I}}}{F,\phi\vdash\exists y\forall x\ \phi}\,\exists_{\mathrm{I}}}{F=\forall x\exists y\ \phi\vdash\exists y\forall x\ \phi}\,\exists_{\mathrm{E}}}{\vdash\forall x\exists y\ \phi\Rightarrow\exists y\forall x\ \phi}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}$$

(c) π_3

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\psi\Rightarrow\phi'}\,\text{ax}\qquad\dfrac{}{\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\psi}\,\text{ax}}{\Gamma=\phi\Rightarrow\psi\Rightarrow\phi',\phi\Rightarrow\psi\vdash\phi'}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

(d) π_4

Figure 1: Arbres de preuves

$$\dfrac{\Gamma,\phi\vdash\psi\qquad\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\psi}\,\text{Coupure}$$

(a) La coupure

$$\dfrac{\Gamma\vdash\neg\psi\Rightarrow\neg\phi}{\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\psi}\,\text{CP}$$

(b) La contraposée

$$\dfrac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma,\phi\vdash\psi}\,\text{W}$$

(c) L'affaiblissement

Figure 2: Règles admissibles

2 Autour du tiers-exclu

Exercise 8 : Le tiers-exclu inclus

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où l'on a remplacé la règle du tiers-exclus par la règle :

$$\dfrac{\Gamma\vdash\neg\neg\phi}{\Gamma\vdash\phi}\,\textsc{Absurd}$$

Exercise 9 : Un nouveau départ

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où on a remplacé la règle du tiers-exclus par la règle :

$$\dfrac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi}\,\textsc{Retour}\text{ (si }\psi\text{ apparaît en conclusion plus bas dans la preuve)}$$