

## λ-Calcul et Logique Informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

### Exercice 1 — Paradoxe de Russell

On formalise (une partie de) la théorie naïve des ensemble en ajoutant à la logique du premier ordre les constructions suivantes :

- les termes du premier-ordre  $\{ x \mid F \}$  représentant intuitivement un ensemble défini par compréhension ;
- les formules  $t \in s$  représentant intuitivement l'appartenance ;
- les termes de preuve  $I_\in$  et  $E_\in$  pour introduire et éliminer les types  $\in$  ;
- les règles de typage suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[x := t]}{\Gamma \vdash I_\in(u) : t \in \{ x \mid F \}} \quad \frac{\Gamma \vdash u : t \in \{ x \mid F \}}{\Gamma \vdash E_\in(u) : F[x := t]}$$

- et enfin la nouvelle réduction  $E_\in(I_\in(u)) \rightarrow u$ .

Nous allons formaliser le paradoxe de Russell (aussi appelé paradoxe du menteur) dans ce système, et ainsi montrer son incohérence. Pour cela, on pose  $S := \{ x \mid \neg(x \in x) \}$ .

1. Donner un terme de type  $(S \in S) \Rightarrow \neg(S \in S)$ .
2. En déduire un terme de type  $S \in S$  et un terme de type  $\perp$ .
3. Ce terme vous rappelle-t-il quelque chose ? Réduisez-le au besoin.

### Exercice 2 — Connecteurs logiques dans le système $\mathcal{F}$

On rappelle les règles de typage pour la nouvelle construction du système  $\mathcal{F}$ , la quantification du second ordre. On note en majuscule les variables de type, et on suppose que la variable  $X$  n'apparaît pas libre dans  $\Gamma$ .

$$\frac{\Gamma \vdash u : F}{\Gamma \vdash \lambda X. u : \forall X. F} \quad \frac{\Gamma \vdash u : \forall X. F}{\Gamma \vdash u T : F[X := T]}$$

1. On pose  $\perp \stackrel{\text{def}}{=} \forall X. X$ . Démontrer  $\perp \Rightarrow P$  pour un type / une formule quelconque  $P$ .
2. On pose  $A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \forall X. (A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X$ . Montrer que cet encodage rend admissibles les règles usuelles de la conjonction, en donnant les encodages correspondants pour les constructions de paire et projections :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma \vdash v : B}{\Gamma \vdash \langle u, v \rangle : A \wedge B} \quad \frac{\Gamma \vdash u : A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash \pi_i(u) : A_i}$$

3. On pose  $A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} \forall X. (A \Rightarrow X) \Rightarrow (B \Rightarrow X) \Rightarrow X$ . Dériver les règles usuelles :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A_i}{\Gamma \vdash \iota_i(u) : A_1 \vee A_2} \quad \frac{\Gamma \vdash u : A \vee B \quad \Gamma, x_1 : A \vdash v_1 : C \quad \Gamma, x_2 : B \vdash v_2 : C}{\Gamma \vdash \text{case}(u, x_1.v_1, x_2.v_2) : C}$$

4. Proposer un encodage de  $\exists X. F$  qui permette de dériver les règles suivantes (où on suppose que  $X$  n'apparaît pas dans  $\Gamma$  et  $P$ ).

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[X := T]}{\Gamma \vdash \langle\langle T, u \rangle\rangle : \exists X. F} \quad \frac{\Gamma \vdash u : \exists X. F \quad \Gamma, x : F \vdash v : P}{\Gamma \vdash \text{CASE}(u, x.v) : P}$$

Remarque : on pourrait aussi vérifier que les réductions attendues (par exemple,  $\text{case}(\iota_i(u), x_1.v_1, x_2.v_2) \rightarrow v_i[x_i := u]$ ) sont simulées par nos encodages.