λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Autour de l'équivalence comportementale

Un contexte est un λ-terme avec un trou, qu'on représentera par un terme spécial $[]$. L'opération de mise en contexte $C[u]$ est définie comme le remplacement *textuel* de ce trou par le terme u : contrairement à la substitution $C[[] := u]$, il est important que ce remplacement provoque la capture des variables libres de u. Par exemple, si $C = (\lambda x.\ [])$ et $C' = (\lambda y.\ [])$ alors $C[x] = (\lambda x.\ x)$ est un terme différent de $C'[x] = (\lambda y.\ x)$.

Un contexte ne contient pas forcément un unique trou :

on peut avoir $C[u] = u\,u$ pour tout u (deux trous), et aussi $C[u] = v$ pour tout u (aucun trou). On peut enfin naturellement généraliser la notion de contexte à plusieurs arguments, pour parler de contextes comme $C := []_2(\lambda x.[]_1[]_2)$, qu'on notera aussi $C[][]$ ou $C[,]$. Ainsi $C[u_1][u_2] = C[u_1, u_2] = u_2(\lambda x.u_1 u_2)$ pour tout u_1 et u_2. S'il n'y a pas d'ambiguité on pourra dénoter $C[u_1, u_2]$ par $C[\vec{u}]$.

Dans cet exercice, la flèche $\to$ dénote la β-réduction.

1. Soit n un entier naturel. Définir plus formellement que dans l'énoncé les notions de contexte n-aire, i.e. contexte à n arguments, et de mise en contexte.

2. Montrer que $u \to v$ implique $C[u] \to^* C[v]$ pour tous termes u, v et contexte C.

3. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des termes clos, $\vec{u} := (u_1, \ldots, u_n)$, un terme v, et un contexte n-aire C tel que $C[\vec{u}] \to v$. Justifier brièvement qu'exactement une des affirmations suivantes est vraie.

(1) La réduction est dans C : v peut s'écrire $C'[\vec{u}]$ tel que pour tout tuple $\vec{t}$ de termes clos, on a $C[\vec{t}] \to C'[\vec{t}]$.

(2) La réduction est dans un certain u_i : il existe un contexte $(n+1)$-aire C' tel que $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i]$ pour tout $\vec{t}$, et $v = C'[\vec{u}, u']$ avec $u_i \to u'$.

(3) Il existe un contexte $(n+1)$-aire C' tel que pour tout $\vec{t}$, il existe $w_{\vec{t}}$ tel que $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i\ w_{\vec{t}}]$, et $u_i = (\lambda x.\ u')$, et $v = C'[\vec{u}, u'[x := w_{\vec{u}}]]$.

4. Montrer par un exemple que l'hypothèse de clôture des termes dans l'affirmation (1) ci-dessus est utile.

On dit que deux termes u et v sont *séparables* s'il existe un contexte C tel que $C[u] \to^* T := \lambda xy.x$ et $C[v] \to^* F := \lambda xy.y$.

5. Soient u et v deux termes séparables. Montrer que pour tout termes A, B, il existe un contexte C tel que $C[u] \to^* A$ et $C[v] \to^* B$.

6. Montrer que la séparabilité est une relation irréflexive et symétrique.
7. Montrer que $(\lambda f \lambda x.\ f\ x)$ et $(\lambda f \lambda x.\ f\ (f\ x))$ sont séparables.
8. Soit $\Omega := (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ et $I := \lambda x.x$. Montrer que si $C[\Omega] \to^* t$ avec t en forme normale, alors pour tout u clos on a aussi $C[u] \to^* t$. En déduire que I et Ω sont inséparables.

On écrit $u \downarrow_\beta$ quand u normalise faiblement pour la β-réduction, *i.e.*, $u \to^* t$ avec t sans β-redex. On dit que u et v sont en *équivalence comportementale*, noté $u \approx v$, si pour tout contexte C on a $C[u] \downarrow_\beta$ ssi $C[v] \downarrow_\beta$. De façon évidente, $\approx$ est une relation d'équivalence et une congruence, et deux termes α-équivalents sont en équivalence comportementale.

9. Montrer que $\to$ est contenue dans $\approx$.
10. Soient u, v tels que $u \to^* \lambda x.\, v$. Montrer $u \approx (\lambda y.\, u\, y)$

pour $y \notin \mathrm{FV}(u)$.

11. Montrer qu'un terme est résoluble (i.e. a une forme normale de tête) ssi sa réduction de tête termine.
12. Montrer que si v n'est pas résoluble alors, pour toute substitution θ, $v\theta$ n'est pas résoluble.
13. Démontrer $u \not\approx v$ pour u résoluble et v non résoluble.
14. On montre finalement que l'équivalence comportementale est strictement incluse dans l'inséparabilité :
    (a) Donner deux termes t et t' inséparables mais tels que $t \not\approx t'$.
    (b) Montrer que si u et v sont séparables alors ils ne sont pas en équivalence comportementale.