

## λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

### Exercice 1 — Autour de l'équivalence comportementale

Un contexte est un λ-terme avec un trou, qu'on représentera par un terme spécial  $\square$ . L'opération de mise en contexte  $C[u]$  est définie comme le remplacement *textuel* de ce trou par le terme  $u$  : contrairement à la substitution  $C[\square := u]$ , il est important que ce remplacement provoque la capture des variables libres de  $u$ . Par exemple, si  $C = (\lambda x. \square)$  et  $C' = (\lambda y. \square)$  alors  $C[x] = (\lambda x. x)$  est un terme différent de  $C'[x] = (\lambda y. x)$ .

Un contexte ne contient pas forcément un unique trou : on peut avoir  $C[u] = u u$  pour tout  $u$  (deux trous), et aussi  $C[u] = v$  pour tout  $u$  (aucun trou). On peut enfin naturellement généraliser la notion de contexte à plusieurs arguments, pour parler de contextes comme  $C := \square_2(\lambda x. \square_1 \square_2)$ , qu'on notera aussi  $C[\square]$  ou  $C[.,.]$ . Ainsi  $C[u_1][u_2] = C[u_1, u_2] = u_2(\lambda x. u_1 u_2)$  pour tout  $u_1$  et  $u_2$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté on pourra dénoter  $C[u_1, u_2]$  par  $C[\vec{u}]$ .

Dans cet exercice, la flèche  $\rightarrow$  dénote la  $\beta$ -réduction.

1. Soit  $n$  un entier naturel. Définir plus formellement que dans l'énoncé les notions de contexte  $n$ -aire, i.e. contexte à  $n$  arguments, et de mise en contexte.
2. Montrer que  $u \rightarrow v$  implique  $C[u] \rightarrow^* C[v]$  pour tous termes  $u, v$  et contexte  $C$ .
3. Soient  $u_1, \dots, u_n$  des termes clos,  $\vec{u} := (u_1, \dots, u_n)$ , un terme  $v$ , et un contexte  $n$ -aire  $C$  tel que  $C[\vec{u}] \rightarrow v$ . Justifier brièvement qu'exactement une des affirmations suivantes est vraie.
  - (1) La réduction est dans  $C$  :  $v$  peut s'écrire  $C'[\vec{u}]$  tel que pour tout tuple  $\vec{t}$  de termes clos, on a  $C[\vec{t}] \rightarrow C'[\vec{t}]$ .
  - (2) La réduction est dans un certain  $u_i$  : il existe un contexte  $(n+1)$ -aire  $C'$  tel que  $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i]$  pour tout  $\vec{t}$ , et  $v = C'[\vec{u}, u']$  avec  $u_i \rightarrow u'$ .
  - (3) Il existe un contexte  $(n+1)$ -aire  $C'$  tel que pour tout  $\vec{t}$ , il existe  $w_{\vec{t}}$  tel que  $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i w_{\vec{t}}]$ , et  $u_i = (\lambda x. u')$ , et  $v = C'[\vec{u}, u'[x := w_{\vec{u}}]]$ .
4. Montrer par un exemple que l'hypothèse de clôture des termes dans l'affirmation (1) ci-dessus est utile.

On dit que deux termes  $u$  et  $v$  sont *séparables* s'il existe un contexte  $C$  tel que  $C[u] \rightarrow^* T := \lambda xy.x$  et  $C[v] \rightarrow^* F := \lambda xy.y$ .

5. Soient  $u$  et  $v$  deux termes séparables. Montrer que pour tout termes  $A, B$ , il existe un contexte  $C$  tel que  $C[u] \rightarrow^* A$  et  $C[v] \rightarrow^* B$ .
6. Montrer que la séparabilité est une relation irréflexive et symétrique.
7. Montrer que  $(\lambda f \lambda x. f x)$  et  $(\lambda f \lambda x. f (f x))$  sont séparables.
8. Soit  $\Omega := (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$  et  $I := \lambda x.x$ . Montrer que si  $C[\Omega] \rightarrow^* t$  avec  $t$  en forme normale, alors pour tout  $u$  clos on a aussi  $C[u] \rightarrow^* t$ . En déduire que  $I$  et  $\Omega$  sont inséparables.

On écrit  $u \downarrow_\beta$  quand  $u$  normalise faiblement pour la  $\beta$ -réduction, *i.e.*,  $u \rightarrow^* t$  avec  $t$  sans  $\beta$ -redex. On dit que  $u$  et  $v$  sont en *équivalence comportementale*, noté  $u \approx v$ , si pour tout contexte  $C$  on a  $C[u] \downarrow_\beta$  ssi  $C[v] \downarrow_\beta$ . De façon évidente,  $\approx$  est une relation d'équivalence et une congruence, et deux termes  $\alpha$ -équivalents sont en équivalence comportementale.

9. Montrer que  $\rightarrow$  est contenue dans  $\approx$ .
10. Soient  $u, v$  tels que  $u \rightarrow^* \lambda x. v$ . Montrer  $u \approx (\lambda y. u y)$  pour  $y \notin \text{FV}(u)$ .
11. Montrer qu'un terme est résoluble (*i.e.* a une forme normale de tête) ssi sa réduction de tête termine.
12. Montrer que si  $v$  n'est pas résoluble alors, pour toute substitution  $\theta$ ,  $v\theta$  n'est pas résoluble.
13. Démontrer  $u \not\approx v$  pour  $u$  résoluble et  $v$  non résoluble.
14. On montre finalement que l'équivalence comportementale est strictement incluse dans l'inséparabilité :
  - (a) Donner deux termes  $t$  et  $t'$  inséparables mais tels que  $t \not\approx t'$ .
  - (b) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont séparables alors ils ne sont pas en équivalence comportementale.