λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Réflexifs

Soit un espace réflexif (D, r, i), *i.e.*, on a $r : D \to [D \to D]$ et $i : [D \to D] \to D$ tels quel $r \circ i = \mathrm{id}_{[D \to D]}$. On y interprète le λ-calcul comme suit :

$$[\![x]\!]_\rho = \rho(x) \quad [\![M\ N]\!]_\rho = r([\![M]\!]_\rho)([\![N]\!]_\rho) \quad [\![\lambda x.\, M]\!]_\rho = i(v \mapsto [\![M]\!]_{\rho[x:=v]})$$

1. Montrer que $[\![u]\!]_\rho = [\![v]\!]_\rho$ quand $u \to_\beta v$.
2. On dit que D est un réflexif extensionnel quand $i \circ r = \mathrm{id}_D$. Montrer qu'on a alors $[\![u]\!]_\rho = [\![v]\!]_\rho$ quand $u \to_\eta v$.

Exercice 2 — Modèle de Engeler

Soit A un ensemble non vide. Informellement, on définit un ensemble B d'arbres d'arbres …d'arbres de A. Plus précisément

- $B_0 := A$

- $B_{n+1} := B_n \cup (\mathcal{P}_{\text{fin}}(B_n) \times B_n)$ pour tout entier naturel n.
- $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

1. Donner une autre expression de $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B) \cup A$.

Le modèle de Engeler est alors donné par le domaine $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, et les fonctions

- $r : D \to (D \to D)$ telle que $r(x) = y \mapsto \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y.\, (\beta, b) \in x\}$
- $i : (D \to D) \to D$ telle que $i(f) = \{(\beta, b) \in B \mid b \in f(\beta)\}$

2. Calculer $[\![\lambda x.\, x]\!]$, $[\![\lambda x.\, \lambda y.\, x]\!]$ et $[\![\lambda x.\, x\, x]\!]$ dans ce modèle.
3. Vérifier qu'on a bien un ordre partiel complet. On pose alors $[D \to D]$ l'espace des fonctions Scott-continues de D dans D. Vérifier que r et i définissent un réflexif pour ces fonctions.
4. Montrer que ce réflexif n'est pas extensionnel.

Exercice 3 — Réduction et typage

On rappelle la règle de η-réduction :

$$\lambda x.\, M\, x \to_\eta M \quad \text{si} \quad x \notin \mathrm{FV}(M)$$

1. Montrer que la β-réduction préserve le typage : $u \to_\beta v$ et $\Gamma \vdash u : T$ implique $\Gamma \vdash v : T$. (Normalement vu/lu en cours)
2. Montrer que la η-réduction préserve le typage.
3. (a) Montrer que la η-expansion ne préserve pas le typage : $u \to_\eta v$ et $\Gamma \vdash v : T$ n'implique pas forcément $\Gamma \vdash u : T$.
   (b) Quelle condition permettrait d'obtenir cette propriété ?
4. (a) De même pour la β-expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on forcément dans un système de types pour lequel le typage est préservé par β-expansion ?
   (b) Quelle condition permettrait de pallier ce problème ?

Exercice 4 — Couples

On considère le λ-calcul étendu avec couples et projections :

$$M ::= x \mid \lambda x.\, M \mid M\ N \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

La réduction est la plus petite congruence contenant β et les nouvelles règles suivantes :

$$\pi_1\langle M_1, M_2\rangle \;\to\; M_1 \qquad\qquad \pi_2\langle M_1, M_2\rangle \;\to\; M_2$$

1. Proposer un système de types pour ce calcul, tel que la réduction préserve le typage.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interprète (logiquement) le type du couple ?
3. En admettant la normalisation (forte) de notre calcul, montrer qu'il est cohérent, c'est à dire qu'il existe des formules non prouvables, ou encore, des types inhabités.