

## λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

### Exercice 1 — Réflexifs

Soit un espace réflexif  $(D, r, i)$ , i.e., on a  $r : D \rightarrow [D \rightarrow D]$  et  $i : [D \rightarrow D] \rightarrow D$  tels quel  $r \circ i = \text{id}_{[D \rightarrow D]}$ . On y interprète le λ-calcul comme suit :

$$\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x) \quad \llbracket M N \rrbracket_\rho = r(\llbracket M \rrbracket_\rho)(\llbracket N \rrbracket_\rho) \quad \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = i(v \mapsto \llbracket M \rrbracket_{\rho[x:=v]})$$

1. Montrer que  $\llbracket u \rrbracket_\rho = \llbracket v \rrbracket_\rho$  quand  $u \rightarrow_\beta v$ .
2. On dit que  $D$  est un réflexif extensionnel quand  $i \circ r = \text{id}_D$ . Montrer qu'on a alors  $\llbracket u \rrbracket_\rho = \llbracket v \rrbracket_\rho$  quand  $u \rightarrow_\eta v$ .

### Exercice 2 — Modèle de Engeler

Soit  $A$  un ensemble non vide. Informellement, on définit un ensemble  $B$  d'arbres d'arbres...d'arbres de  $A$ . Plus précisément

- $B_0 := A$
- $B_{n+1} := B_n \cup (\mathcal{P}_{\text{fin}}(B_n) \times B_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .
- $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

1. Donner une autre expression de  $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B) \cup A$ .

Le modèle de Engeler est alors donné par le domaine  $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$ , et les fonctions

- $r : D \rightarrow (D \rightarrow D)$  telle que  $r(x) = y \mapsto \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y. (\beta, b) \in x\}$
- $i : (D \rightarrow D) \rightarrow D$  telle que  $i(f) = \{(\beta, b) \in B \mid b \in f(\beta)\}$

2. Calculer  $\llbracket \lambda x. x \rrbracket$ ,  $\llbracket \lambda x. \lambda y. x \rrbracket$  et  $\llbracket \lambda x. x x \rrbracket$  dans ce modèle.
3. Vérifier qu'on a bien un ordre partiel complet. On pose alors  $[D \rightarrow D]$  l'espace des fonctions Scott-continues de  $D$  dans  $D$ . Vérifier que  $r$  et  $i$  définissent un réflexif pour ces fonctions.
4. Montrer que ce réflexif n'est pas extensionnel.

### Exercice 3 — Réduction et typage

On rappelle la règle de  $\eta$ -réduction :

$$\lambda x. M x \rightarrow_\eta M \quad \text{si } x \notin \text{FV}(M)$$

1. Montrer que la  $\beta$ -réduction préserve le typage :  $u \rightarrow_\beta v$  et  $\Gamma \vdash u : T$  implique  $\Gamma \vdash v : T$ . (Normalement vu/lu en cours)
2. Montrer que la  $\eta$ -réduction préserve le typage.
3. (a) Montrer que la  $\eta$ -expansion ne préserve pas le typage :  $u \rightarrow_\eta v$  et  $\Gamma \vdash v : T$  n'implique pas forcément  $\Gamma \vdash u : T$ .  
(b) Quelle condition permettrait d'obtenir cette propriété ?

4. (a) De même pour la  $\beta$ -expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on forcément dans un système de types pour lequel le typage est préservé par  $\beta$ -expansion ?
- (b) Quelle condition permettrait de pallier ce problème ?

**Exercice 4 — Couples**

On considère le  $\lambda$ -calcul étendu avec couples et projections :

$$M ::= x \mid \lambda x. M \mid M N \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

La réduction est la plus petite congruence contenant  $\beta$  et les nouvelles règles suivantes :

$$\pi_1 \langle M_1, M_2 \rangle \rightarrow M_1 \quad \pi_2 \langle M_1, M_2 \rangle \rightarrow M_2$$

1. Proposer un système de types pour ce calcul, tel que la réduction préserve le typage.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interprète (logiquement) le type du couple ?
3. En admettant la normalisation (forte) de notre calcul, montrer qu'il est cohérent, c'est à dire qu'il existe des formules non prouvables, ou encore, des types inhabités.