λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Réflexifs

Soit un espace réflexif (D, r, i) , *i.e.*, on a $r : D \rightarrow [D \rightarrow D]$ et $i : [D \rightarrow D] \rightarrow D$ tels que $r \circ i = \text{id}_{[D \rightarrow D]}$. On y interprète le λ-calcul comme suit :

$$\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x) \quad \llbracket M N \rrbracket_\rho = r(\llbracket M \rrbracket_\rho)(\llbracket N \rrbracket_\rho) \quad \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = i(v \mapsto \llbracket M \rrbracket_{\rho[x:=v]})$$

1. Montrer que $\llbracket u \rrbracket_\rho = \llbracket v \rrbracket_\rho$ quand $u \rightarrow_\beta v$.
2. On dit que D est un réflexif extensionnel quand $i \circ r = \text{id}_D$. Montrer qu'on a alors $\llbracket u \rrbracket_\rho = \llbracket v \rrbracket_\rho$ quand $u \rightarrow_\eta v$.

Exercice 2 — Modèle de Engeler

Soit A un ensemble non vide. Informellement, on définit un ensemble B d'arbres d'arbres .. d'arbres de A . Plus précisément

- $B_0 := A$
- $B_{n+1} := B_n \cup (\mathcal{P}_{\text{fin}}(B_n) \times B_n)$ pour tout entier naturel n .
- $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

1. Donner une autre expression de $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B) \cup A$.

Le modèle de Engeler est alors donné par le domaine $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, et les fonctions

- $r : D \rightarrow (D \rightarrow D)$ telle que $r(x) = y \mapsto \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y. (\beta, b) \in x\}$
- $i : (D \rightarrow D) \rightarrow D$ telle que $i(f) = \{(\beta, b) \in B \mid b \in f(\beta)\}$

2. Calculer $\llbracket \lambda x. x \rrbracket$, $\llbracket \lambda x. \lambda y. x \rrbracket$ et $\llbracket \lambda x. x x \rrbracket$ dans ce modèle.
3. Vérifier qu'on a bien un ordre partiel complet. On pose alors $[D \rightarrow D]$ l'espace des fonctions Scott-continues de D dans D . Vérifier que r et i définissent un réflexif pour ces fonctions.
4. Montrer que ce réflexif n'est pas extensionnel.