λ-Calcul et Logique Informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Réduction et typage

On rappelle la règle de η -réduction :

$$\lambda x. M \ x \rightarrow_{\eta} M \quad \text{si } x \notin \text{FV}(M)$$

1. Montrer que la β -réduction préserve le typage : $u \rightarrow_{\beta} v$ et $\Gamma \vdash u : T$ implique $\Gamma \vdash v : T$. (Normalement vu/lu en cours)
2. Montrer que la η -réduction préserve le typage.
3. (a) Montrer que la η -expansion ne préserve pas le typage : $u \rightarrow_{\eta} v$ et $\Gamma \vdash v : T$ n'implique pas forcément $\Gamma \vdash u : T$.
(b) Quelle condition permettrait d'obtenir cette propriété ?
4. (a) De même pour la β -expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on forcément dans un système de types pour lequel le typage est préservé par β -expansion ?
(b) Quelle condition permettrait de pallier ce problème ?

Exercice 2 — Couples

On considère le λ -calcul étendu avec couples et projections :

$$M ::= x \mid \lambda x. M \mid M \ N \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

La réduction est la plus petite congruence contenant β et les nouvelles règles suivantes :

$$\pi_1 \langle M_1, M_2 \rangle \rightarrow M_1 \quad \pi_2 \langle M_1, M_2 \rangle \rightarrow M_2$$

1. Proposer un système de types pour ce calcul, tel que la réduction préserve le typage.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interprète (logiquement) le type du couple ?
3. En admettant la normalisation (forte) de notre calcul, montrer qu'il est cohérent, c'est à dire qu'il existe des formules non prouvables, ou encore, des types inhabités.