λ-Calcul et Logique Informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Système $\mathcal{D}$ (types intersection)
On considère le système de types suivant :

$$\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma, x : T \vdash M : T'}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \Rightarrow T'} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T \Rightarrow T' \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M\ N : T'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \quad \Gamma \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2}{\Gamma \vdash M : T_i}$$

1. Pour chacun des termes suivants, donner un type que ce terme admet dans le système $\mathcal{D}$: $\lambda x.\ x\ x$, $\lambda x \lambda y.\ x\ (y\ x)$, $(\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda y.\ y)$.
2. Quelle est la différence avec les règles de la conjonction/couple ? Quel sens ce système peut-il avoir dans le contexte du typage des langages de programmations ?
3. Parmi les types suivants, donner un terme pour ceux qui sont habités (on ne tentera pas de prouver qu'un type n'est pas habité) :
   — $(\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\alpha \cap \beta) \Rightarrow \tau$
   — $((\alpha \cap \beta) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \tau$
   — $((\tau \Rightarrow \alpha) \cap (\tau \Rightarrow \beta)) \Rightarrow \tau \Rightarrow (\alpha \cap \beta)$
   — $(\tau \Rightarrow (\alpha \cap \beta)) \Rightarrow ((\tau \Rightarrow \alpha) \cap (\tau \Rightarrow \beta))$
4. (a) Considérons la définition du cours des candidats de réductibilité. Montrer que l'intersection d'une famille non vide de candidats est un candidat.
   (b) Proposer une définition pour $\mathrm{RED}_{T \cap T'}$ et généraliser le théorème du cours reproduit ci-après : si $\Gamma \vdash u : G$ est dérivable, alors pour toute $\theta \in \mathrm{RED}_\Gamma$ on a $u\theta \in RED_G$.
   (c) Montrer que tout terme typable dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant.
5. Montrer que pour tout terme u en forme normale il existe Γ et T tels que $\Gamma \vdash u : T$. Indice : on a vu une façon pratique d'écrire une forme normale.
6. On définit la fusion de deux contextes de liaison comme suit.
   — $\Gamma \wedge \emptyset := \Gamma$ (et symmétriquement)
   — $\Gamma \wedge (\Delta, x : F) := (\Gamma \wedge \Delta), x : F$ si $x \notin \Gamma$ (et symmétriquement)
   — $(\Gamma, x : F) \wedge (\Delta, x : G) := (\Gamma \wedge \Delta), x : F \cap G$.

   (a) Si les ensembles des variables de Γ et Δ sont disjoints, exprimer $\Gamma \wedge \Delta$ autrement.
   (b) Justifier brièvement quelles relations il y a entre $\Gamma \wedge \Gamma$ et Γ ; puis entre $\Gamma \wedge \Delta$ et $\Delta \wedge \Gamma$; puis entre $(\Gamma \wedge \Delta) \wedge \Sigma$ et $\Gamma \wedge (\Delta \wedge \Sigma)$.
   (c) Montrer que $\Gamma \vdash u : F$ implique $\Gamma \wedge \Delta \vdash u : F$.
7. (a) Montrer que si $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$ et $\Gamma \vdash v : \sigma$ sont dérivables et $x \notin FV(v)$, alors $\Gamma \vdash (\lambda x.u)v : \tau$ est dérivable.
   (b) Montrer que si $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$ et $\Delta \vdash v : \sigma$ sont dérivables, alors $\Gamma \wedge \Delta \vdash (\lambda x.u)v : \tau$ est dérivable.
8. Montrer que tout terme fortement normalisant est typable dans $\mathcal{D}$.