λ-Calcul et Logique Informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Système $\mathcal{D}_\omega$ ("Généralisation" du Système $\mathcal{D}$)
On étend le système $\mathcal{D}$ en ajoutant un type atomique spécial noté ω, et la règle de typage suivante :

$$\frac{}{\Gamma \vdash M : \omega}$$

1. Donner un terme typable dans $\mathcal{D}_\omega$ mais pas dans $\mathcal{D}$. En termes calculatoires, quelle propriété de typage a-t-on perdu ? Nous reste-t-il quelque chose d'intéressant ?
2. Montrer que $u \to v$ et $\Gamma \vdash v : T$ implique $\Gamma \vdash u : T$.
3. Montrer que tout terme faiblement normalisant est typable dans $\mathcal{D}_\omega$ par un type sans ω.

On va voir que la réciproque est vraie si on se restreint aux "bons" types. Pour cela, posons quelques définitions. Un ensemble $\mathcal{X}$ est dit *saturé* si

$$u[x := t]\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X} \text{ implique } (\lambda x.\ u)\ t\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X}$$

Pour $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \Lambda$, on définit

$$\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} := \{\ u \in \Lambda \mid (u\ v) \in \mathcal{Y} \text{ pour tout } v \in \mathcal{X}\ \}$$

Finalement, étant donnée une interprétation $\mathcal{I}$ qui à tout type de base α associe un ensemble saturé $|\alpha|_\mathcal{I}$, on l'étend aux types comme suit :

$$|\omega|_\mathcal{I} = \Lambda \qquad |T \cap T'|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I} \cap |T'|_\mathcal{I} \qquad |T \Rightarrow T'|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I} \Rightarrow |T'|_\mathcal{I}$$

4. Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$, comparer $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}' \Rightarrow \mathcal{Y}'$.
5. Montrer que $|T|_\mathcal{I}$ est saturé pour tout T.
6. Montrer que $x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash u : T$ et $t_i \in |T_i|_\mathcal{I}$ pour tout i impliquent $u[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \in |T|_\mathcal{I}$.

On dit que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ est une *paire adéquate* si $\mathcal{N}$ est saturé, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_0 \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$.

On dit que ω apparaît positivement (resp. négativement) dans un type T s'il apparaît à gauche d'un nombre pair (resp. impair) d'implications. Par exemple, ω apparaît uniquement positivement dans ω et $(\omega \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$ et il apparaît uniquement négativement dans $\alpha \Rightarrow (\omega \cap \beta) \Rightarrow \gamma$.

7. Formaliser la notion d'occurence positive et négative.

8. Soit $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ une paire adéquate et $\mathcal{I}$ une interprétation telle que pour tout α on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$. Montrer alors que pour tout T sans occurrence positive (resp. négative) de ω on a $|T|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_{\mathcal{I}}$).
9. Montrer qu'on a une paire adéquate si l'on prend $\mathcal{N}$ l'ensemble des termes qui normalisent selon la stratégie externe gauche et $\mathcal{N}_0$ l'ensemble des termes $(x\ t_1 \dots t_n)$ avec x une variable et chaque $t_i \in \mathcal{N}$.
10. Soit $\cdot \vdash u : T$ avec T sans occurrence positive de ω. Montrer que u normalise faiblement.