Langages Formels - TD 5

March 15, 2024

Exercise 1 : Flashback

We proved that the language of palindromes over alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ is not recognizable. We say a palindrome is *non trivial* if its length is greater than or equal to 2. Determine which of the following languages are recognizable (and prove it):

1. The language L_1 of words in Σ^* containing a non trivial palindrome as a prefix.

   $L_1 = (ab^*a + ba^*b) \cdot \Sigma^*$ is recognizable.

2. The language L_2 of words in Σ^* containing a non trivial palindrome of even length as a prefix.

   Not recognizable. Assume an automaton recognizes L_2, and consider the words $(ab)^n(ba)^n \in L_2$ for any $n \in \mathbb{N}$. By pigeonhole principle (principe des tiroirs), there is $m < n$ such that $\delta(i, (ab)^n) = \delta(j, (ab)^n)$. So $(ab)^n(ba)^m$ is accepted, contradiction.

Exercise 2 : Congruences and monoids

An equivalence relation R on Σ^* is a *congruence* if uRv implies $xuyRxvy$ for all x, y. We will call *congruence classes* the equivalence classes of a congruence.

1. Prove that a language is regular iff it is the union of some of the congruence classes of a congruence relation of *finite index*, i.e. with a finite number of congruence classes.

   On passe de reconnaissable par monoide à congruence avec $u \equiv v$ ssi $\phi(u) = \phi(v)$.

A congruence c_1 is *coarser* (i.e. “grossière”) than another congruence c_2 if every congruences classe of c_2 is included in a congruence class of c_1.

2. Let L be a language. Find a characterization of the coarsest congruence $\equiv_L$ such that L is the union of some of its congruence classes.

   C’est la congruence syntaxique : $u \equiv_L v$ ssi $\forall x, y \in \Sigma^*, xuy \in L \iff xvy \in L$.

This congruence is called the *syntactic* congruence of L.

3. Give a more precise criterion for the recognizability of a language. Apply it to prove that $\{ a^n b^n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$ is not recognizable.

   Un langage est reconnaissable si sa congruence syntaxique est d’index fini. La congruence syntaxique de $\{ a^n b^n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$ n’est pas fini.

4. We know that a language of Σ^* is regular iff there exists a finite monoid $(M, \times)$, a morphism $\mu : (\Sigma^*, \cdot) \to (M, \times)$, and a set $P \subseteq M$ such that $L = \mu^{-1}(P)$. Find a characterization of the smallest such monoid for a regular language L.

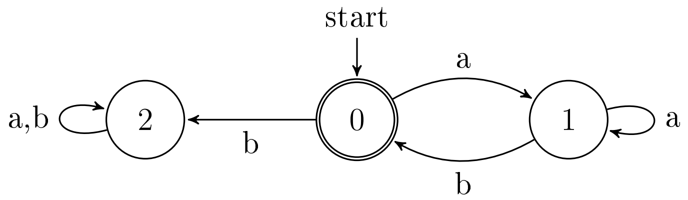
   On prend le monoïde $\Sigma^* / \equiv_L$. S'il existe un monoïde plus petit, alors on peut trouver une congruence plus grossière que $\equiv_L$.

5. What is the link between the syntactic congruence, this smallest monoid, and the minimal automaton?

   Le plus petit monoïde est $M_L = \Sigma^* / \equiv_L$. On peut construire un automate reconnaissant L en prenant $Q = M_L$: c'est l'automate minimal.

Exercise 3 : Transition monoid

We consider the following finite deterministic complete automaton $\mathcal{A}$ over $\Sigma = \{a, b\}$:



1. Give $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

   $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (a^+b)^*$.

2. Give M the transition monoid of this automata, a morphism ϕ and $P \subset M$ such that $L = \phi^{-1}(P)$.

   $M = \{\phi(\varepsilon) = \langle 0, 1, 2\rangle, \phi(a) = \langle 1, 1, 2\rangle, \phi(b) = \langle 2, 0, 2\rangle, \phi(ab) = \langle 0, 0, 2\rangle, \phi(bb) = \langle 2, 2, 2\rangle, \phi(ba) = \langle 2, 1, 2\rangle\}$ and $P = \{\phi(\varepsilon), \phi(ab)\}$.

3. What is the syntactical congruence of L? What are its equivalence classes?

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \varepsilon \\
[a] &= (a^+b)^*a \\
[b] &= b(a^+b)^* \\
[ab] &= (a^+b)^+ \\
[bb] &= \Sigma^* bb \Sigma^* \\
[ba] &= (ba^+)^+
\end{aligned}
$$

Exercise 4 : State complexity of a language

Given a recognizable language L, we define its *state complexity* $\mathsf{Sc}(L)$ by the number of states of its minimal automaton. Show that the following inequalities hold (L^{t} is the transposed of L, the language of the mirror images of words of L):

1. $\mathsf{Sc}(L \cap K) \leq \mathsf{Sc}(L)\mathsf{Sc}(K)$;
2. $\mathsf{Sc}(L \cup K) \leq \mathsf{Sc}(L)\mathsf{Sc}(K)$;

3. $\mathsf{Sc}(L^{\mathrm{t}}) \leq 2^{\mathsf{Sc}(L)}$;
4. $\mathsf{Sc}(LK) \leq (2\mathsf{Sc}(L) - 1)2^{\mathsf{Sc}(K)-1}$.

- Découle de la construction de la fermeture produit, où $Q = Q_L \times Q_K$, qui conserve le déterminisme.
- Même construction que pour la fermeture produit, sauf que $F = F_L \times Q_K \cup Q_L \times F_K$.
- Automate des parties.
- On prend deux DFA minimaux, pour L et K On construit l'automate $\mathcal{A}$, avec pour état initial i_L, comme états finals F_K ($+F_L$ si i_K est final). Les transitions sont celles de L et K auxquelles on ajoute pour tout $f_L \in F_L$, et pour tout a, $f_L \xrightarrow{a} \delta_K(i_K, a)$

  On ne peut pas pour autant supprimer i_K, car il peut être atteint depuis un autre état de K.

  La déterminisation va engendrer des ensembles contenant au plus un état de L, car cette partie de l'automate construit est déterministe.

  On observe enfin que si l'on a un état $f_L \in F_l$ en même temps que i_K dans un ensemble d'états, on peut supprimer i_K car ses transitions sont simulées par f_L.

  S'il n'y a pas d'état final dans A_L alors l'automate à un état de L convient aussi pour $L \cdot K$, et la borne est évidente. Sinon l'observation permet d'obtenir la borne: il y a $2^{(K-1)}$ sous-ensembles de Q_K privé de i_K, et $2 * L - 1$ car pour chaque état de L on l'a soit tout seul, soit avec i_K, et il y a au moins un couple exclu par l'observation précédente.

We will now show that some of these bounds have the right order of magnitude. Let $\Sigma = \{ a, b \}$.

5. Consider $L_n = \{|w|_a + |w|_b = 2n\}$ and $L'_n = \{|w|_a + 2|w|_b = 3n\}$ for the bound for intersection.
6. Consider $L_n = \Sigma^{n-1}a\Sigma^*$ for the bound for transposition.

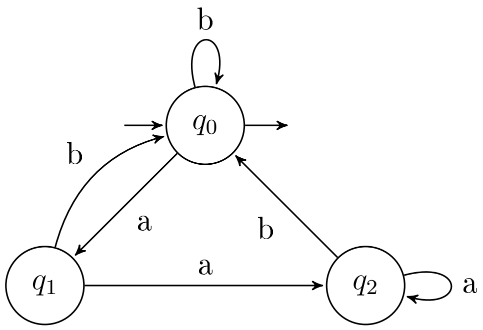
Contrôle continu 5

À rendre pour le 07/03 à 16h15.

Exercise 5 : Automate → Monoïde

Donnez le monoïde syntaxique M du langage $\mathcal{L}$ reconnu par cet automate, un morphisme ϕ et $P \subset M$ tel que $\phi^{-1}(P) = \mathcal{L}$.

On peut minimiser l'automate en fusionnant les états 1 et 2. M a trois éléments, $[\varepsilon] = (0,1)$, $[a] = (1,1)$ et $[b] = (0,0)$. ϕ envoie ε sur $[\varepsilon]$ et tout mot de Σ^+ sur l'élement qui correspond à leur dernière lettre. $P = \{[\varepsilon], [b]\}$.



Quelle est la congruence syntaxique de $\mathcal{L}$? Quelles sont ses classes d'équivalence ?

$\mathcal{L}$ a trois classes d'équivalence: ε, Σ^*a et Σ^*b.

Exercise 6 : Minimization by Brzozowski inversion

1. Show that the determinized of a co-deterministic co-accessible automaton which recognizes a language L is (isomorphic to) the minimal automaton of L.
2. Using this result, devise a procedure to minimize an automaton. What is the complexity of this method ?

Soit $\mathcal{A}$ co-déterministe co-accessible, i.e. $\mathcal{A} = \mathcal{B}^t$ l'automate $\mathcal{B} = (Q, q_i, F, \delta_{\mathcal{B}})$ déterministe et accessible où on échange les états initiaux et acceptants et inverse les transitions : $\mathcal{A} = (Q, F, q_i, \delta_{\mathcal{A}})$. On note $\mathcal{A}'$ le déterminisé de $\mathcal{A}$ dont on a enlevé les états inaccessibles. On veut montrer que $\mathcal{A}'$ est isomorphe à l'automate des résiduel : pour tout u, v tels que $u^{-1}\mathcal{L} = v^{-1}\mathcal{L}$, $\delta'(F, u) = \delta'(F, v)$.

Soit $p \in \delta'(F, u)$. $\mathcal{A}$ est co-accessible, donc $\exists w$ tel que $\delta_{\mathcal{A}}(p, w) = q_i$. Donc $uw \in \mathcal{L}$ et $vw \in \mathcal{L}$. $\mathcal{A}$ est co-déterministe, donc p est l'unique état tel que $(p, w) = q_i$. Ainsi $p \in \delta'(F, v)$. On peut montrer l'inclusion inverse $\delta'(F, v) \subseteq \delta'(F, u)$ de la même manière.