TD 10 : Logique constructive

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Preuves constructives

On écrit $\Gamma \vdash_c A$ si $\Gamma \vdash A$ en déduction naturelle classique, et $\Gamma \vdash_i A$ si $\Gamma \vdash A$ en déduction naturelle constructive (le « i » signifie *intuitioniste*).

1.1 Preuves constructives et négations

Prouvez que $\vdash_i A \Rightarrow \neg\neg A$ et $\vdash_i \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$. Tracez le graphe avec pour sommets les $\neg^k A$ pour $k \in \mathbb{N}$ et pour arêtes les implications prouvables constructivement. Quelles arrêtes sont ajoutées dans le cas classique ?

1.2 Propriétés constructives

1. Prouvez que $A \vee \neg A$ n'est pas démontrable dans la déduction naturelle classique pour toute formule A.
2. Prouvez que si $\vdash_i \exists x.\, A$, alors il existe un terme t tel que $\vdash_i (x/t)A$.
3. Prouvez que si $\vdash_i \forall x \exists y.\, A$, alors il existe une fonction f des termes clos vers les termes telle que pour tout terme t, $\vdash_i (y/f(t), x/t)A$.
4. Prouvez que la formule $\exists x.\, (P(x) \Rightarrow \forall y.\, P(y))$ n'est pas démontrable pour la déduction naturelle constructive.

1.3 Traduction par double négation

Étant donnée une formule A, on définit sa traduction de GÖDEL (ou traduction par double négation) par induction structuelle sur A :

— si A est atomique, $\mathcal{G}(A) = \neg\neg A$
— $\mathcal{G}(\top) = \top$
— $\mathcal{G}(\bot) = \bot$
— $\mathcal{G}(\neg A) = \neg\mathcal{G}(A)$
— $\mathcal{G}(A_1 \wedge A_2) = \mathcal{G}(A_1) \wedge \mathcal{G}(A_2)$
— $\mathcal{G}(A_1 \vee A_2) = \neg\neg(\mathcal{G}(A_1) \vee \mathcal{G}(A_2))$
— $\mathcal{G}(A_1 \Rightarrow A_2) = \mathcal{G}(A_1) \Rightarrow \mathcal{G}(A_2)$
— $\mathcal{G}(\forall x.\, A) = \forall x.\, \mathcal{G}(A)$
— $\mathcal{G}(\exists x.\, A) = \neg\neg\exists x.\, \mathcal{G}(A)$

Si Γ est un ensemble de formules, on écrit $\mathcal{G}(\Gamma)$ l'ensemble $\{\mathcal{G}(A) \mid A \in \Gamma\}$. Le but de l'exercice est de prouver l'équivalence entre $\Gamma \vdash_c A$ et $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_i \mathcal{G}(A)$.

1. Prouvez que pour toute formule A, $\vdash_i \neg\neg\mathcal{G}(A) \Rightarrow \mathcal{G}(A)$. Essayez de traiter au moins les cas suivants : $\neg$; $\wedge$; $\exists$.

   Vous pouvez utiliser le fait que $\neg\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ est démontrable constructivement.
2. Montrez que pour toute formule A, si $\Gamma \vdash_c A$ alors $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_i \mathcal{G}(A)$. Essayez de traiter au moins les cas : introduction de $\wedge$ et de $\vee$; élimination de $\vee$; RAA.
3. Montrez que pour toute formule A, $\vdash_c A \Leftrightarrow \mathcal{G}(A)$.
4. Montrez que pour toute formule A, si $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_i \mathcal{G}(A)$ alors $\Gamma \vdash_c A$.

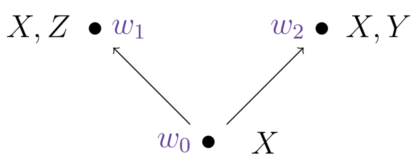
2 Structures de Kripke et logique constructive

Soit $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke avec un ensemble de mondes W et son ordre $\leq$. Soit φ une valuation. On écrira $\mathcal{K}, w, \varphi \models A$ pour $[\![\varphi]\!]^w_\varphi = 1$. On pourra omettre la structure et la valutation dans cette notation quand elles sont claires au vu du contexte.

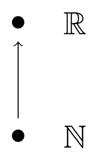
2.1 Structures de Kripke

Dans la suite, X, Y, Z sont des symboles de prédicat constants.

1. Est-ce que la structure suivante :



   est un modèle de $(\neg Y \wedge X) \Rightarrow Z$?
2. Soit $w \in W$ un monde.
   (a) Que signifie $\mathcal{K}, w \models \neg\neg X$?
   (b) Que signifie $\mathcal{K}, w \models \neg(\neg X \wedge \neg Y)$?
3. Pour chacune des formules suivantes, si elles ne sont pas prouvables constructivement, donnez un modèle de Kripke ne les validant pas.
   (a) $X \Rightarrow \neg\neg X$
   (b) $\neg\neg X \Rightarrow X$
   (c) $\neg X \vee \neg\neg X$
   (d) $\neg(X \wedge Y) \Rightarrow (\neg X \vee \neg Y)$
   (e) $(\neg X \vee \neg Y) \Rightarrow \neg(Y \wedge X)$
   (f) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg X \vee Y)$
   (g) $\neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$
   (h) $\neg\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$
4. Est-ce que la structure de Kripke



   est un modèle de $\exists x. \exists y. x < y \wedge \neg(\exists z. x < z \wedge z < y)$?

2.2 Connecteurs indépendants

On dit qu'un connecteur binaire $\otimes$ est indépendant d'un ensemble de connecteurs C s'il n'y a pas de formule A utilisant X et Y, construite uniquement avec des connecteurs de C telle que $\vdash_i (X \otimes Y) \Leftrightarrow A$.

1. Montrez que si $\vee$ n'est pas indépendant de $\{\bot, \wedge, \neg, \Rightarrow\}$, alors $\vdash_i \neg\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg\neg X \vee \neg\neg Y)$. *Astuce : utilisez les questions 3.(g) et 3.(h) de l'exercice 2.1* Conclure.

On considère la structure de Kripke $\mathcal{K}$ avec les mondes suivants : $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ avec $\omega_1 \leq \omega_3$, $\omega_2 \leq \omega_3$ et $\hat{X}^{\omega_1} = \hat{Y}^{\omega_2} = \hat{X}^{\omega_3} = \hat{Y}^{\omega_3} = 1$ et $\hat{Y}^{\omega_1} = \hat{X}^{\omega_2} = 0$.
Conseil : Faire un dessin

2. Montrez que pour toute formule A contenant uniquement X, Y, $\bot$, $\neg$, $\vee$ et $\Rightarrow$, si $\omega_3 \models A$ alors $\omega_1 \models A$ ou $\omega_2 \models A$. Conclure que $\wedge$ est indépendant de $\{\bot, \vee, \neg, \Rightarrow\}$.

2.3 Tiers exclu

On note $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des symboles de prédicats d'arité 0 de notre langage, que l'on suppose non vide. Soit $\mathcal{K}$ la structure de Kripke avec pour mondes les *interprétations partielles* i.e. les paires (I, f) où $I \subset \mathcal{P}_0$ et $f : I \longrightarrow \{0, 1\}$. Pour tout $X \in \mathcal{P}_0$, $\hat{X}^{(I,f)} = 1$ ssi $X \in I$ et $f(X) = 1$.

La structure $\mathcal{K}$ est ordonnée par $\sqsubseteq$, où $(I, f) \sqsubseteq (J, g)$ ssi $I \subseteq J$ et pour tout $X \in I$, $f(X) = g(X)$.

1. que signifie $\mathcal{K}, (I, f) \models \neg X$ où $X \in I$?
2. Montrez que $\mathcal{K}$ ne valide pas $X \vee \neg X$.
3. Sonnez une formule A non prouvable constructivement, mais validée par la structure $\mathcal{K}$.

3 Exercices additionnels

3.1 Théorème de Yankov

Soit A une formule propositionnelle, démontrable en logique classique (une tautologie). On définit F_2 l'ensemble ordonné $\omega_1 \leq \omega_2$. On appelle structure de base F_2 toute structure de Kripke d'ensemble ordonné sous-jacent F_2. On appelle LI $+ A$ l'ensemble des formules démontrables quand on ajoute à la déduction naturelle intuitionniste, la règle suivante :

$$\frac{}{\vdash (X_1/B_1, \ldots, X_n/B_n)A}$$

Par exemple, LI $+ (X \vee \neg X)$ est LC, l'ensemble des formules démontrables dans la logique classique.

Le but de cet exercice est de prouver le théorème de YANKOV : *pour toute toute tautologie A,* LI $+ A =$ LC*, si et seulement si, A n'est pas valide dans au moins une structure de base F_2.*

1. Montrez que si LI $+ A =$ LC alors A n'est pas valide dans une structure de base F_2. *Astuce : vous pouvez utiliser le modèle dans lequel $\neg\neg X \Rightarrow X$ n'est pas valide trouvé à l'exercice 1.2.*
2. Soit $\mathcal{K}$ une structure de Kripke avec pour ensemble sous-jacent F_2 telle que $\hat{X}^{w_2} = 1$ et $\hat{X}^{w_1} = 0$. Supposons que A n'a qu'une seule variable propositionnelle X. Montrez que si A n'est pas satisfaite dans $\mathcal{K}$ alors toute structure de Kripke $\mathcal{K}'$ d'ensemble sous-jacent W' tel que A soit valide est telle que pour tout monde $w \in W'$, $\hat{X}^w = 0$ implique qu'il existe un monde $w' \geq w$ tel que pour tout monde $w'' \geq w'$, $\hat{X}^{w''} = 0$.
3. Conclure : Si A est une formule avec une seule variable propositionnelle X et $\mathcal{K}$ ne satisfait pas A, alors $A \vdash_i \neg\neg X \Rightarrow X$.

4. Soit A une proposition qui a pour variables $X_1, \dots, X_n$. Montrez que si A n'est pas valide dans une structure de base F_2, alors il existe des formules B_1, ..., B_n avec une seule variable propositionnelle X, tel que $\mathcal{K}$ ne satisfait pas la formule $(X_1/B_1, \dots, X_n/B_n)A$.
5. Conclure.

3.2 Arithmétique de Heyting

On appelle arithmétique de Heyting la théorie constructive dont les axiomes sont ceux de l'arithmétique de Peano, i.e. ses théorèmes sont toutes les formules prouvables constructivement d'après les axiomes de Peano. On écrit $HA \vdash_i A$ quand A est un théorème de l'arithmétique de Heyting.

1. Montrez que l'égalité est décidable dans l'arithmétique de Heyting :

$$HA \vdash_i \forall x. \forall y. (x = y \vee x \neq y)$$

   Astuce : utilisez la récurrence et $\forall x. (x = 0 \vee \exists y.\ x = S(y))$.
2. Le but est de montrer que l'arithmétque de Heyting a la propriété du témoin, i.e. si $HA \vdash_i \exists x. A$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $HA \vdash_i (x/\underline{\mathsf{n}})A$, où $\underline{\mathsf{n}}$ est le terme $S^n(0) = S(\dots(S(0)))$. Par l'absurde, supposons que pour tout entier n, $HA \not\vdash_i (x/\underline{\mathsf{n}})A$. Ainsi, pour tout n, il existe une structure de Kripke $\mathcal{K}_n$ telle que $\mathcal{K}_n$ satisfait tous les axiomes de Peano, mais pas $(x/\underline{\mathsf{n}})A$. On construit la structure $\mathcal{K} = \{\omega\} \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n$ avec comme élément minimal ω, dans lequel $\mathcal{D}_\omega = \mathbb{N}$, S est interprétée comme le successeur, 0 comme 0, $+$ comme l'addition, $\times$ comme la multiplication et $=$ comme l'égalité.
   (a) Montrez que $\mathcal{K}$ est une structure de Kripke.
   (b) Montrez que $\mathcal{K}, \omega \not\models \exists x. A$.
   (c) Montrez que $\mathcal{K}$ valide les axiomes de Peano (vous pouvez vous limiter au principe d'induction).
3. On veut montrer que si $HA \vdash_i A \vee B$ alors $HA \vdash_i A$ ou $HA \vdash_i B$.
   (a) Montrez que pour toutes formules A et B ne contenant pas la variable x,

$$HA \vdash_i (A \vee B) \Leftrightarrow \exists x. (x = 0 \Rightarrow A) \wedge (x \neq 0 \Rightarrow B)$$

   (b) Conclure.

3.3 Une sémantique topologique

Dans cet exercice, on ne regarde que le fragment propositionnel de la logique constructive, on ne considère donc que les formules sans quantificateurs. On donne une première semantique à cette logique, la semantique topologique de TARSKI.

Un espace topologique est défini par un ensemble E et un ensemble $\subseteq \mathfrak{P}(E)$ tel que :

— l'ensemble vide $\emptyset$ est dans

— E est dans

— si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles dans , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in$

— if $(U_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'ensembles dans , alors $\bigcap_{i \in I} U_i \in$

Les élements de sont dit être *ouverts*. Etant donné un sous-ensemble $W \subseteq E$, on définit :

— $c(W) = E \setminus W$, le complémentaire de W

— $i(W)$, le plus grand ouvert inclus dans W, appelé l'*intérieur* de W

Une interprétation topologique est définie par un espace topologique $\langle E, \rangle$ et une fonction σ des variables vers . L'interprétation est étendue à toutes les formules A par induction structuelle :

— $[\![\top]\!] = E$
— $[\![\bot]\!] = \emptyset$
— $[\![X]\!] = \sigma(X)$
— $[\![A_1 \wedge A_2]\!] = [\![A_1]\!] \cap [\![A_2]\!]$
— $[\![A_1 \vee A_2]\!] = [\![A_1]\!] \cup [\![A_2]\!]$
— $[\![\neg A]\!] = i(c([\![A]\!]))$
— $[\![A_1 \Rightarrow A_2]\!] = i(c([\![A_1]\!]) \cup [\![A_2]\!])$

On peut remarquer que $[\![A]\!]$ est un ouvert. On appelle $[\![\Gamma]\!]$ l'ensemble ouvert $\bigcap\limits_{A\in\Gamma} [\![A]\!]$.

1. Montrez que si $\Gamma \vdash A$ est démontrable dans la logique constructive, alors $[\![\Gamma]\!] \subseteq [\![A]\!]$ dans toute interprétation topologique.
2. Donnez des formules non démontrables en logique constructive. (tier-exclu,Formules de De Morgan, ...). Vous pouvez utilisez $\mathbb{R}$ avec sa topologie habituelle (générée par les intervalles ouverts).

Remarque : l'implication réciproque est vraie, mais plus dure à prouver...

3.4 Algèbres de Heyting

1. Refaire l'exercice 2.1 question 3, mais en exhibant des algèbres de Heyting à la place des structures de Kripke.
2. Soit une structure de kripke $\mathcal{K}$. Montrez qu'on peut construire une algèbre de Heyting H telle que pour toute formule A et valuation σ, $[\![A]\!]^{\mathcal{K}}_{\sigma} = 1$ ssi $[\![A]\!]^{H}_{\sigma} = 1$.
3. Soit une algèbre de Heyting H. Montrez qu'on peut construire une sutructure de Kripke $\mathcal{K}$ telle que pour toute formule A et valuation σ, $[\![A]\!]^{\mathcal{K}}_{\sigma} = 1$ ssi $[\![A]\!]^{H}_{\sigma} = 1$.