Logique 2023-2024

Département Informatique, ENS Paris Saclay

TD 13 : Définissabilité

Nicolas Margulies `nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr`

Théo Vignon `theo.vignon@lmf.cnrs.fr`

1 Modèles finis

1. Considérons un langage où il n'y aucun symbole de fonction ni de prédicat. Montrez qu'il y ne peut pas y avoir de formule close φ telle que $\mathcal{S} \models \varphi$ si et seulement si le domaine de $\mathcal{S}$ est fini.

Maintenant considérons un langage avec un symbole R de prédicat binaire et le symbole =. Pour $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on définit la théorie T_R^α avec les axiomes suivants, pour $i < \alpha$, en plus de ceux de l'égalité :

$$
\begin{array}{cr}
\forall x.\exists y.\ R(x,y) & (Tot) \\
\forall x.\exists y.\ R(y,x) & (Tot^{-}1) \\
\forall x,y,z.R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow y = z & (Uniq) \\
\forall x,y,z.R(y,x) \wedge R(z,x) \Rightarrow y = z & (Uniq^{-}1) \\
\forall x_1,\dots,x_i.\neg(R(x_1,x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{i-1},x_i) \wedge R(x_i,x_1)) & (NoLoop_i)
\end{array}
$$

2. Montrez que pour tout n, le Duplicateur a une stratégie gagnante pour n coups pour deux modèles de $T_R^{2^n}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrez que la finitude n'est pas définissable au premier ordre dans T_R^n. i.e. Il n'y a pas de formule φ tel que pour tout modèle $\mathcal{S}$ de T_R^n, on a $S \models \varphi$ si et seulement si le domaine de $\mathcal{S}$ est fini.
4. Montrez que la finitude est définissable au premier ordre dans T_R^∞.

2 Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé pour la logique à deux variables

Considérons la variante des jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé où le Duplicateur gagne si, après un certain nombre de coups $n \leq 2$, où $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)$ ont été joués, alors pour tout i entre 2 et n, le couple de paires (a_{i-1},b_{i-1}),(a_i,b_i) forme un isomorphisme partiel.

Considérons maintenant les trois structures suivantes sur le langage avec aucun symbole de fonctions et un unique prédicat binaire R, avec pour interprétation de R les flèches sur les dessins suivants :

$\mathcal{S}_2$: $a_1 \longrightarrow a_2$

$\mathcal{S}_3$: $b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3$

$\mathcal{S}_4$: $c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow c_3 \longrightarrow c_4$

1. Montrez que le Duplicateur n'a pas de stratégie gagnante pour deux coups entre $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$

$\mathcal{Z}$

$$\cdots \longrightarrow c_{-1} \longrightarrow c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_n \longrightarrow c_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

$\mathcal{C}_n$

$$\begin{tikzcd} c'_1 \arrow[r] & c'_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c'_{n-1} \arrow[r] & c'_n \arrow[llll, bend right] \end{tikzcd}$$

2. Quel est le plus grand nombre de coups pour lequel le Duplicateur a une strategie gagnante entre $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$?

3. Quel est le plus petit n tel que le Duplicateur a une stratégie gagnante entre $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{C}_n$ (pour tout nombre de coups) ?

On appelle logique à deux variables, l'ensemble de formules qui utilise uniquement deux variables. Par exemple $R(x, y)$ et $R(x, y) \wedge \exists x.R(y, f(x))$ sont des formules à deux variables, mais $R(x, y) \wedge R(y, z)$ ou encore $R(x, y) \wedge \exists z.\ R(y, f(x))$ ne le sont pas si x, y et z sont des variables distinctes.

4. Donnez une formule à deux variables φ qui est fermée et plate (i.e. ne contient pas de symbole de fonction), telle que $\mathcal{S}_2 \models \varphi$ et $\mathcal{S}_3 \not\models \varphi$.
5. Donnez une formule à deux variables ψ qui est fermée et plate (i.e. ne contient pas de symbole de fonction), telle que $\mathcal{S}_4 \models \psi$ et $\mathcal{S}_3 \not\models \psi$.
6. Montrez que si le Duplicateur a une strategie gagnante sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ pour n coups, alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ valident les mêmes propositions closes avec deux variables de rang $\leq n$.