

# TD 13 : Définissabilité

Nicolas Margulies [nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr](mailto:nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr)

Théo Vignon [theo.vignon@lmf.cnrs.fr](mailto:theo.vignon@lmf.cnrs.fr)

## 1 Modèles finis

1. Considérons un langage où il n'y aucun symbole de fonction ni de prédicat. Montrez qu'il y ne peut pas y avoir de formule close  $\varphi$  telle que  $\mathcal{S} \models \varphi$  si et seulement si le domaine de  $\mathcal{S}$  est fini.

Maintenant considérons un langage avec un symbole  $R$  de prédicat binaire et le symbole  $=$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on définit la théorie  $T_R^\alpha$  avec les axiomes suivants, pour  $i < \alpha$ , en plus de ceux de l'égalité :

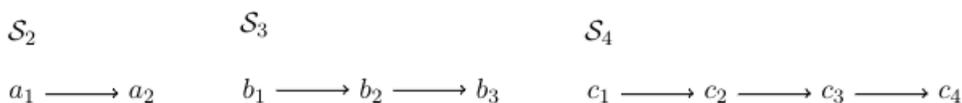
$$\begin{array}{ll}
 \forall x. \exists y. R(x, y) & (Tot) \\
 \forall x. \exists y. R(y, x) & (Tot^{-1}) \\
 \forall x, y, z. R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow y = z & (Uniq) \\
 \forall x, y, z. R(y, x) \wedge R(z, x) \Rightarrow y = z & (Uniq^{-1}) \\
 \forall x_1, \dots, x_i. \neg (R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{i-1}, x_i) \wedge R(x_i, x_1)) & (NoLoop_i)
 \end{array}$$

2. Montrez que pour tout  $n$ , le Duplicateur a une stratégie gagnante pour  $n$  coups pour deux modèles de  $T_R^{2^n}$
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , Montrez que la finitude n'est pas définissable au premier ordre dans  $T_R^n$ . i.e. Il n'y a pas de formule  $\varphi$  tel que pour tout modèle  $\mathcal{S}$  de  $T_R^n$ , on a  $\mathcal{S} \models \varphi$  si et seulement si le domaine de  $\mathcal{S}$  est fini.
4. Montrez que la finitude est définissable au premier ordre dans  $T_R^\infty$ .

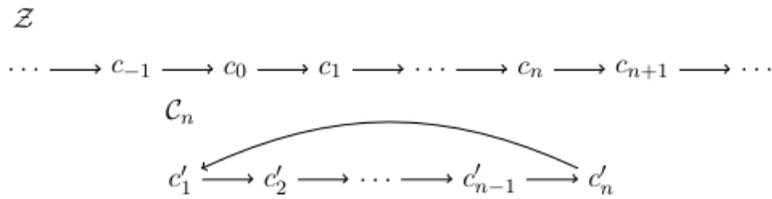
## 2 Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé pour la logique à deux variables

Considérons la variante des jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé où le Duplicateur gagne si, après un certain nombre de coups  $n \leq 2$ , où  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  ont été joués, alors pour tout  $i$  entre 2 et  $n$ , le couple de paires  $(a_{i-1}, b_{i-1}), (a_i, b_i)$  forme un isomorphisme partiel.

Considérons maintenant les trois structures suivantes sur le langage avec aucun symbole de fonctions et un unique prédicat binaire  $R$ , avec pour interprétation de  $R$  les flèches sur les dessins suivants :



1. Montrez que le Duplicateur n'a pas de stratégie gagnante pour deux coups entre  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$



2. Quel est le plus grand nombre de coups pour lequel le Duplicateur a une stratégie gagnante entre  $\mathcal{S}_3$  et  $\mathcal{S}_4$  ?
3. Quel est le plus petit  $n$  tel que le Duplicateur a une stratégie gagnante entre  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{C}_n$  (pour tout nombre de coups) ?

On appelle logique à deux variables, l'ensemble de formules qui utilise uniquement deux variables. Par exemple  $R(x, y)$  et  $R(x, y) \wedge \exists x. R(y, f(x))$  sont des formules à deux variables, mais  $R(x, y) \wedge R(y, z)$  ou encore  $R(x, y) \wedge \exists z. R(y, f(x))$  ne le sont pas si  $x, y$  et  $z$  sont des variables distinctes.

4. Donnez une formule à deux variables  $\varphi$  qui est fermée et plate (i.e. ne contient pas de symbole de fonction), telle que  $\mathcal{S}_2 \models \varphi$  et  $\mathcal{S}_3 \not\models \varphi$ .
5. Donnez une formule à deux variables  $\psi$  qui est fermée et plate (i.e. ne contient pas de symbole de fonction), telle que  $\mathcal{S}_4 \models \psi$  et  $\mathcal{S}_3 \not\models \psi$ .
6. Montrez que si le Duplicateur a une stratégie gagnante sur  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  pour  $n$  coups, alors  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  valident les mêmes propositions closes avec deux variables de rang  $\leq n$ .