TD 02 : Substitution

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Substitution, α-équivalence

Dans le TD précédent, la notion de substitution a été brièvement mentionnée. Intuitivement, le principe est de remplacer une variable dans une formule par la valeur qu'on veut qu'elle ait. Par exemple, si on a démontré $\forall x.\ x = x$, on aimerait bien pouvoir en déduire $0 = 0$. Pour pouvoir exprimer une tele règle, il faut savoir ce que veut dire « remplacer la variable x par 0 dans la formule $x = x$ ».

Une première solution est de définir la substitution sur les termes récursivement de la façon suivante :

$$(t/x)y := \begin{cases} y & \text{si } y \neq x \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$
$$(t/x)f(t_1, \ldots, t_n) := f((t/x)t_1, \ldots, (t/x)t_n)$$

1. Calculez les substitutions suivantes :
   - $(0/x)x$
   - $(0/x)y$
   - $(0/x)x = x$
   - $(0/x)\forall x.\ x = x$
   - $(y/x)\forall y.\ y = x$
2. Voyez-vous le problème ?

Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de considérer le cas des variables « muettes » ou liées. En effet, il est possible de changer la variable au niveau du lieur et à toutes les occurences où elle est liée sans changer la signification de la formule ($\forall x.\ x = x$ et $\forall y.\ y = y$ représentent en ce sens la même formule).

On notera $fv(t)$ les variables libres de t, $bv(t)$ les variables liées de t, et $Vars(t) = fv(t) \cup bv(t)$ l'ensemble des variables apparaissant dans t.

Ainsi, pour tout symbole de fonction liant une variable (exemple ici donné avec un quantificateur), on rend équivalents les termes suivants : $\forall x.\ t \equiv_\alpha \forall y.\ (y/x)t$ où $y \notin Var(t)$ et x non liée dans t (les conditions supplémentaires évitent les problèmes précédents). Ensuite, on définit $\equiv_\alpha$ comme la plus petite relation d'équivalence préservée par les symboles de fonctions qui contient les cas précédents.

3. Les termes suivants sont-ils α-équivalents ? Justifier.
   - $\forall x.\ x = x$ et $\forall y.\ y = y$
   - x et y
   - $\forall y.\ y = y \Rightarrow \forall x.\ x = x$ et $\forall x.\ x = x \Rightarrow \forall x.\ x = x$
   - $\forall y.\ y = y \Rightarrow \forall x.\ x = y$ et $\forall x.\ x = x \Rightarrow \forall x.\ x = x$

On peut maintenant définir la substitution générale $(t/x)u$: puisqu'on dispose d'un ensemble infini de variables, lorsqu'on veut substituer il est toujours possible de trouver des termes t_1, u_1 α-équivalents respectivement à t et u tels que : $x \notin bv(u)$, et $fv(t) \cap bv(u) = \emptyset$, pour lesquels on peut appliquer la substitution précédente.

4. Calculez les substitutions suivantes en détaillant les α-renommages nécessaires
   — $(y/x)(\exists z\ z = x)$
   — $(z/x)(\exists y\ y = x)$
   — $(f(y)/x)(\exists y\ y = x)$
   — $(z/x)(x = f(y) \wedge \exists x\ f(x) = x)$
   — $(y/x)(\forall x\ \forall y\ x = f(y))$

2 Indices de DeBruijn

On étudie dans cet exercice un moyen alternatif de représenter les variables afin de simplifier les problèmes d'α-renommage et de substitution. En pratique, ce système est moins lisible par des êtres humains, mais plus agréable à manipuler algorithmiquement.

Le principe est de remplacer les noms de variables par des nombres. Ainsi, la variable $\mathbf{0}$ désigne la variable liée par le lieur le plus proche, la variable $\mathbf{1}$ par le suivant, etc. S'il n'y a pas assez de lieurs, ce sont des variables libres.

1. Dans les termes suivants, indiquer pour chaque variable si elle est libre ou liée, et quel lieur la lie le cas échéant.
   — $\mathbf{0} = \mathbf{1}$
   — $\forall \mathbf{0} = \mathbf{0}$
   — $\forall\forall \mathbf{0} = \mathbf{1}$
   — $\forall \mathbf{0} = \mathbf{1}$
   — $\forall \mathbf{0} = \mathbf{1} \Rightarrow \forall \mathbf{0} = \mathbf{1}$
2. Réécrire les termes ci-dessus avec des variables usuelles.
3. Généraliser ce processus pour traduire tout terme utilisant des indices de DeBruijn vers un terme utilisant des variables.
4. Prouver que si $t \equiv_\alpha u$, alors il existe un terme v écrit avec indices de DeBruijn qui peut se traduire à la fois vers t et u. Montrer que le choix de v est unique pour des termes clos.
5. En déduire un processus de décision de l'α-équivalence.
6. Comment définir la substitution pour les termes écrits avec des variables de DeBruijn de sorte à ne pas substituer des variables liées et éviter la capture de variables.