TD 03 : Logique des prédicats

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Preuves en vrac

Donner des démonstrations en déduction naturelle des séquents suivants :

1. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$
2. $\vdash (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi') \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi')$
3. $\vdash (\varphi' \Rightarrow \varphi) \vee (\varphi' \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \varphi \vee \psi)$
4. $\vdash \forall x.\ \varphi \Rightarrow \exists x.\ \varphi$
5. $\vdash (\forall x.\ \varphi \vee \forall x.\ \psi) \Rightarrow \forall x.\ (\varphi \vee \psi)$
6. $\vdash \exists x.\ (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\exists x.\ \varphi \wedge \exists x.\ \psi)$
7. $\vdash \exists y.\ \forall x.\ \varphi \Rightarrow \forall x.\ \exists y.\ \varphi$

2 Lois de De Morgan

Soit φ et ψ des formules. Démontrez les séquents suivants.

1. $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
2. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3. $\vdash \exists x.\ \neg\varphi \Leftrightarrow \neg(\forall x.\ \varphi)$.
4. $\vdash \forall x.\ \neg\varphi \Leftrightarrow \neg(\exists x.\ \varphi)$.

3 Paradoxe de Russell

On considère une sorte Set de termes, et un symbole de prédicat $\in$ d'arité $\langle \mathsf{Set}, \mathsf{Set}, \mathsf{Prop} \rangle$.
Prouvez $\forall y.\ (y \in a \Leftrightarrow \neg y \in y) \vdash \bot$.

4 Triangles en déduction naturelle

On considère un langage formé de

- trois sortes de termes : `point`, `droite` et `scalaire`,
- deux symboles de fonction : la distance d d'arité $\langle \mathtt{point}, \mathtt{point}, \mathtt{scalaire} \rangle$, la médiatrice m d'arité $\langle \mathtt{point}, \mathtt{point}, \mathtt{droite} \rangle$,
- deux symboles de prédicats : l'égalité $=$ d'arité $\langle \mathtt{scalaire}, \mathtt{scalaire} \rangle$, l'appartenance $\in$ d'arité $\langle \mathtt{point}, \mathtt{droite} \rangle$.

Soit Γ le contexte formé des deux propositions

$$\begin{cases} \forall x \forall y \forall z \quad [x \in m(y,z) & \Leftrightarrow \quad d(x,y) = d(y,z)] \\ \forall x \forall y \forall z \quad [(x = y \land y = z) & \Rightarrow \quad x = y] \end{cases}$$

et

$$\varphi \quad = \quad \forall w \forall x \forall y \forall z \ [(w \in m(x,y) \land w \in m(y,z))) \Rightarrow w \in m(x,z)]$$

Donnez une démonstration du séquent $\Gamma \vdash \varphi$.

5 Ereurs fréquentes

Les arbres de la figure 1 ne sont pas des démonstrations, des erreurs s'y sont glissées. Lesquelles ? Dans quels cas les arbres π_2 et π_3 sont-ils des démonstrations ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \lor \psi \vdash \varphi \lor \psi}\,\mathsf{ax}}{\varphi \lor \psi \vdash \varphi}\,\lor_{\mathsf{I}}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \lor \psi \vdash \varphi \lor \psi}\,\mathsf{ax}}{\varphi \lor \psi \vdash \psi}\,\lor_{\mathsf{I}}^2}{\varphi \lor \psi \vdash \varphi \land \psi}\,\land_{\mathsf{I}}}{\vdash (\varphi \lor \psi) \Rightarrow (\varphi \land \psi)}\,\Rightarrow_{\mathsf{I}}$$

(a) π_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x.\ \varphi \vdash \exists x.\ \varphi}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{\exists x.\ \varphi, \varphi \vdash \varphi}\,\mathsf{ax}}{\exists x.\ \varphi \vdash \varphi}\,\exists_{\mathsf{E}}}{\exists x.\ \varphi \vdash \forall x.\ \varphi}\,\forall_{\mathsf{I}}}{\vdash \exists x.\ \varphi \Rightarrow \forall x.\ \varphi}\,\Rightarrow_{\mathsf{I}}$$

(b) π_2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \vdash \forall x.\ \exists y.\ \varphi}\,\mathsf{ax}}{F \vdash \exists y.\ \varphi}\,\forall_{\mathsf{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, \varphi \vdash \varphi}\,\mathsf{ax}}{F, \varphi \vdash \forall x.\ \varphi}\,\forall_{\mathsf{I}}}{F, \varphi \vdash \exists y.\ \forall x.\ \varphi}\,\exists_{\mathsf{I}}}{F = \forall x.\ \exists y.\ \varphi \vdash \exists y.\ \forall x.\ \varphi}\,\exists_{\mathsf{E}}}{\vdash \forall x.\ \exists y.\ \varphi \Rightarrow \exists y.\ \forall x.\ \varphi}\,\Rightarrow_{\mathsf{I}}$$

(c) π_3

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi'}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}\,\mathsf{ax}}{\Gamma = \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi', \varphi \Rightarrow \psi \vdash \varphi'}\,\Rightarrow_{\mathsf{E}}$$

(d) π_4

FIGURE 1 – Arbres de preuves

6 Règles admissibles

Prouver que les deux règles de la figure 2 sont *admissibles*, c'est-à-dire que si un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est démontré en utilisant ces règles en plus des règles de déduction naturelle, il existe une preuve en déduction naturelle de $\Gamma \vdash \varphi$.

$$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ \text{Coupure}$$

(a) La coupure

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}\ \text{CP}$$

(b) La contraposée

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ \text{W}$$

(c) L'affaiblissement

FIGURE 2 – Règles admissibles

7 Le tiers-exclu inclus

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où l'on a remplacé la règle du tiers-exclus par l'une des règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ Absurd} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi} \text{ Pierce}$$

8 Un nouveau départ

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où on a remplacé la règle du tiers-exclus par la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ Retour (si } \psi \text{ apparaît en conclusion plus bas dans la preuve)}$$