Logique 2023-2024
Département Informatique, ENS Paris Saclay

TD 05 : Modèles, Correction, Cohérence

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Démontrabilité et non démontrabilité

1.1 Démontrer la non-démontrabilité

Soit un langage $\mathcal{L}$ contenant un symbole de fonction 0-aire c et un prédicat unaire P.

1. Est-ce que $P(c)$ est valide dans tout modèle de $\mathcal{L}$?
2. Est-ce que $\neg P(c)$ est valide dans tout modèle de $\mathcal{L}$?
3. Est-ce que $P(c) \vee \neg P(c)$ est valide dans tout modèle de $\mathcal{L}$?

1.2 Preuves en vrac

Les propositions suivantes sont-elles démontrables ? Donnez une dérivation, une preuve de validité sémantique, ou un contre-modèle.

1. $\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$
2. $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
3. $\vdash \exists x \exists y \top$
4. $\vdash \exists x \forall y \ (T(x) \Rightarrow T(y))$
5. $\forall x \ (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\forall x \ T(x) \Rightarrow \forall x \ R(x))$
6. $\exists x \ (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\forall x \ T(x) \Rightarrow \exists x \ R(x))$
7. $\exists x \ (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\exists x \ T(x) \Rightarrow \exists x \ R(x))$

1.3 Règle admissible, 2.0

Prouver que la règle d'affaiblissement est admissible.

2 It's just a theory ; an equality theory.

Rappel : théorie de l'égalité

La théorie de l'égalité sur un langage L ayant une sorte de termes s, un ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F}$ et un ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P}$ contenant un prédicat $=$ d'arité $\langle s, s, Prop\rangle$ est définie par :

$$\begin{cases} \forall x\ (x = x) & \\ \forall x_1 \ldots \forall x_i \forall x_i' \ldots \forall x_n & (x_i = x_i' \Rightarrow \\ & f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)) \\ \forall x_1 \ldots \forall x_j \forall x_j' \ldots \forall x_m & (x_j = x_j' \Rightarrow \\ & P(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) \Rightarrow P(x_1, \ldots, x_j', \ldots, x_m)) \end{cases}$$

pour tout symbole de fonction n-aire $f \in \mathcal{F}$ et symbole de prédicat m-aire $P \in \mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de la théorie de l'égalité. On note $\sim$ la relation binaire $\mathcal{M}_s$ définie par :

$$x \sim y \quad \text{iff} \quad (x, y) \in =_{\mathcal{M}}$$

1. En notant que la symétrie, réflexivité, et transitivité sont démontrables dans la théorie de l'égalité (cf TD3), montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (a) Prouvez que l'on peut définir un “modèle quotient”, càd un modèle $\mathcal{M}/\sim$ tel que pour toute formule A et valuation σ :

   $$M, \sigma \models \varphi \quad \text{iff} \quad M/\sim, [\sigma] \models A$$

   où $[\sigma](x) = [\sigma(x)]$, i.e. la classe d'équivalence de $\sigma(x)$ pour la relation $\sim$.
   (b) Montrez que dans ce modèle quotient, l'égalité est interprétée comme l'égalité mathématique. On appelle un tel modèle un *modèle égalitaire*.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire une formule A_n telle que pour tout modèle égalitaire $\mathcal{M}$ de A_n, $|\mathcal{M}_s| = n$.

3 Arithmétique

On se place sur le langage de l'arithmétique de Peano.

Rappel : l'arithmétique de Peano

Les axiomes de PA sont les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{aligned}
\forall x \quad & 0 + x = x && (1)\\
\forall x \forall y \quad & s(x) + y = s(x+y) && (2)\\
\forall x \quad & 0 \times x = 0 && (3)\\
\forall x \forall y \quad & s(x) \times y = (x \times y) + y && (4)\\
\forall x \exists y \quad & x = 0 \vee x = s(y) && (5)\\
\forall x \quad & \neg s(x) = 0 && (6)\\
\forall x \forall y \quad & s(x) = s(y) \Rightarrow x = y && (7)
\end{aligned}$$

Schéma d'axiome d'induction (pour toute formule A dont les variables libres sont incluses dans $x, x_1, \dots, x_n$) :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A\{x \to 0\} \Rightarrow \forall y.\ (A\{x \to y\} \Rightarrow A\{x \to s(y)\}) \Rightarrow \forall y.\ A\{x \to y\}$$

Soit $\mathcal{M}_1$ le modèle défini par $\mathcal{M}_{1_{nat}} = \mathbb{N}$, munie de

- $0_{\mathcal{M}_1}$ l'entier naturel 0,
- la fonction $s_{\mathcal{M}_1}$ du successeur sur $\mathbb{N}$,
- la fonction $+_{\mathcal{M}_1}$ de l'addition sur $\mathbb{N}$,
- la fonction $\times_{\mathcal{M}_1}$ de la multiplication sur $\mathbb{N}$,
- la relation binaire $=_{\mathcal{M}_1}$ de l'égalité sur $\mathbb{N}$ – pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $(n, p) \in =_{\mathcal{M}_1}$ si et seulement si $n = p$.

1. $\mathcal{M}_1$ est-il un modèle de PA ?
2. $\mathcal{M}_1$ est-il un modèle des formules $\forall x \forall y \exists z\ (x + z = y)$ et $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$?
3. Mêmes questions pour le modèle $\mathcal{M}_2$ défini par $\mathcal{M}_2 = \mathbb{Z}$, $0_{\mathcal{M}_2}$ l'entier 0, $s_{\mathcal{M}_2}$ le successeur sur $\mathbb{Z}$, $+_{\mathcal{M}_2}$ l'addition sur $\mathbb{Z}$, $\times_{\mathcal{M}_2}$ la multiplication sur $\mathbb{Z}$, et $=_{\mathcal{M}_2}$ l'égalité sur $\mathbb{Z}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des axiomes (1), (2), (5), (6), et (7) de PA (on a enlevé les axiomes de la multiplication et le schéma de récurrence).

4. Exhiber un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que pour tout n, $x \neq s^n_{\mathcal{M}}(0_{\mathcal{M}})$.
5. Exhiber un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ qui n'est pas un modèle de $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$.
6. Les formules suivantes sont-elles prouvables dans $\mathcal{E}$?
   (a) $P(0), \forall x\ P(x) \Rightarrow P(S(x)) \vdash P(S(S(S(0))))$.
   (b) $P(0), \forall x\ P(x) \Rightarrow P(S(x)) \vdash \forall x\ P(x)$.

   An axiom A is *independent* from a theory $\mathcal{T}$ iff the sequents $\mathcal{T} \vdash A$ and $\mathcal{T} \vdash \neg A$ are not provable.

7. Montrez que le schéma d'induction est indépendant des autres axiomes de PA.

4 Une théorie des ensembles finis

Donnez un modèle de ZF$\backslash\{$ **Infinity** $\}$ dans lequel tous les ensembles sont finis. Concluez l'indépendance de l'axiome de l'infini du reste des axiomes de ZF.