Logique 2023-2024
Département Informatique, ENS Paris Saclay

TD 06 : Indécidabilité, Incomplétude

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Construction de Gödel

Dans le cours, nous avons donné une démonstration non-constructive du théorème d'incomplétude de Gödel. Nous savons donc qu'il existe une formule G telle que ni G, ni $\neg G$ ne soient démontrables, mais on n'a aucune idée de savoir de quelle formule il s'agit. Le but de cet exercice est de construire une telle formule.

Soit w une variable. Soit f la fonction recursive telle que $f(n, p, q) = 1$ si $n = \lceil \pi \rceil, p = \lceil A \rceil$, et π est une preuve dans l'arithmétique de $(\underline{q}/w)A$, sinon $f(n, p, q) = 0$.

Soient $F[x_1, x_2, x_3, y]$ la proposition représentant f et $T \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\ \neg F[x, w, w, \underline{1}$. Soient $m = \lceil T \rceil$ et G la proposition close $(m/w)T$.

1. Montrez que si G est prouvable dans PA, alors G n'est pas prouvable dans PA.
2. Montrez que si $\neg G$ est prouvable dans PA, alors G aussi.
3. Conclure.

2 Pavages

On rappelle le problème de pavage de Wang (1961) :

— **Donnée** : un ensemble fini de tuiles $T = \{Ti \mid 1 \leq i \leq n\}$ et des relations de compatibilité horizontales et verticales $H, V \subseteq T^2$.

— **Question** : est-il possible de paver le plan avec ces tuiles (sans rotations des tuiles) en respectant les compatibilités, i.e. existe-t-il $t : \mathbb{N}^2 \to T$ tel que pour tout $i, j, t(i, j)Ht(i + 1, j)$ et $t(i, j)Vt(i, j + 1)$?

Ce problème a été montré indécidable par Berger en 1964.

1. Montrer que si une théorie est incohérente alors elle admet un sous-ensemble fini incohérent. (C'est la propriété de compacité, qui est proche du problème de la complétude des systèmes de preuve.)
2. En déduire qu'une instance du problème de pavage de Wang permet de paver le quart de plan ssi elle permet de paver tout carré fini. (Considérer un encodage du problème de pavage de Wang en logique propositionnelle, utilisant un nombre infini de formules et de symboles de prédicat.)
3. En encodant de nouveau le problème de pavage, montrer que la validité est indécidable dans le calcul des prédicats sans symboles de fonction, et avec des prédicats d'arité au moins deux.

3 Relativiser la compacité

On a vu qu'il existe une proposition qui n'est ni prouvable ni réfutable dans l'arith- métique de Peano. On peut donc ajouter cette proposition, ou son contraire, pour obtenir une théorie étendue admettant les entiers naturels comme modèle. En répétant l'argument une obtient une séquence de théories comme dans cet exercice ; une situation qu'on retrouve aussi dans des arguments de complétude.

Soit $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de théories (pour l'inclusion) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un modèle $\mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{M}_n \models \mathcal{T}_n$ mais $\mathcal{M}_n \not\models \mathcal{T}_{n+1}$. Soit $\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

1. Montrez que $\mathcal{T}$ est cohérente.
2. Prouvez qu'il n'existe pas de sous-théorie finie $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ ssi $\mathcal{M} \models \mathcal{T}'$.

4 Logique monadique des prédicats

Dans cet exercice, nous considérons la logique des prédicats sans symboles de fonctions et avec un ensemble fini de prédicats $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ tous d'arité 1.

1. Prouvez que pour tout modèle $\mathcal{M}$, il existe un modèle $\mathcal{N}$ de taille inférieure à 2^n et une fonction surjective $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ telle que pour toute formule φ avec pour variables libres $x_1, \ldots, x_m$ et éléments $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{M}$, on a :

$$\mathcal{M}, [x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n] \models \varphi \text{ssi} \mathcal{N}, [x_1 = f(a_1), \ldots, x_n = f(a_n)] \models \varphi$$

2. En déduire que si φ est close, φ est prouvable ssi elle est valide dans tout modèle de taille inférieure à 2^n. Quelle est la conséquence de ce résultat ?
3. Cette méthode ne marchera pas exactement si on veut ajouter des symboles de fonction unaires. Considérons le langage avec un symbole de fonction g et un symbole de prédicat P (unaires). Exhibez un modèle $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire un ensemble et une interprétation de g et P sur cet ensemble) tels que le résultat de la question 1 est faux.
4. Montrez que pour toute formule φ, on peut quand même décider de la démontrabilité de φ en énumérant les modèles sous un certain cardinal.
5. Montrez qu'avec un symbole de prédicat unaire et un symbole de fonction binaire, la logique des prédicats devient indécidable.